

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI  
Etapa locală-februarie 2013

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Barem Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se demonstreze că  $\left(\left(\frac{1}{3}, +\infty\right), *\right)$  este grup comutativ.

b) Să se găsească două numere  $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  pentru care  $a * b = 2$ .

**Soluție:**

a) Demonstrarea axiomelor grupului.....5p

b)  $x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3} = (3x - 1)(3y - 1) + \frac{1}{3}$

$(3x - 1)(3y - 1) = \frac{5}{3}$ .....1p

un exemplu ar putea fi  $3x - 1 = \frac{5}{3}$ , iar  $3y - 1 = 1$ ,  $x = \frac{8}{9}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ .....1p

2. În mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale se consideră mulțimile  $M = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$  și  $P = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}\}$ .

a) Să se arate că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe mulțimea  $M$  o structură de grup comutativ.

b) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea  $M$  care au exponenți naturali consecutivi este un element al mulțimii  $P$ .

c) Să se arate că  $M \cap P \neq \emptyset$ .

**Soluție:**

a) Demonstrarea axiomelor grupului.....4p

b)  $2^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 2^{n+3} = 2^{4n+6} = (2^{2n+3})^2 \in P$ .....2p

c) E suficient să se dea exemple de un element comun celor două mulțimi, de exemplu :  $16 = 2^4 = 4^2$ .....1p

3. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și funcția  $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{a,b}(x) = a(x + 1)^2 - bx^2$ .

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f_{1,-1}(x)$ .

b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 [f_{1,1}(x) - f_{1,1}(-x)] dx$ .

c) Să se determine valoarea parametrului real  $a$ , știind că  $\int_{-1}^1 f_{a,a}^2(x) dx = 378$ .

**Soluție:**

a)  $\int f_{1,-1}(x) = \int (2x^2 + 2x + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$ .....2p

b)  $\int_{-1}^1 [f_{1,1}(x) - f_{1,1}(-x)] dx = \int_{-1}^1 4x dx = 0$ .....2p

c)  $\int_{-1}^1 f_{a,a}^2(x) dx = \int_{-1}^1 (2ax + a)^2 dx = a^2 \int_{-1}^1 (2x + 1)^2 dx$ .....1p  
 $= \frac{14}{3} a^2 = 378$ .....1p

deci  $a^2 = 81 \Rightarrow a = \pm 9$ .....1p

4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ .

a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

**Soluție:**

a) Funcția  $f$  este continuă pe intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, \infty)$  fiind elementară.....1p

Studiem continuitatea în 0:  $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 2$ .....1p

$f$  continuă pe  $\mathbb{R}$ , deci admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .....1p

b) Orice primitivă este de forma  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$ .....2p

Deoarece  $F$  este derivabilă este și continuă deci  $F_s(0) = F_d(0)$  de unde se obține  
că  $C_1 = C_2 - 1$ .....1p

Deci  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 2x + C_1, & x < 0 \\ 2x - \cos x + C_1 + 1, & x \geq 0 \end{cases}, F(0)=0$ , deci  $C_1 = 0$ .....1p